

* $A, B \in IF^{u \times v}$ ισοδύναμοι αν $\exists P \in IF^{u \times u}, Q \in IF^{v \times v}$
αυτοσπρίσιμοι με $B = PAQ$

Θεώρημα: A, B ισοδ. $(\Leftrightarrow)$ A, B ίδιο αριθ. και διαστάσεις
αν $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(B)$

► Ορισμός εξαρτημένων γραμμών
(* ποιο σημαντικό είναι)

Προβλ.

Έστω A, B δύο εξαρτημένοι πίνακες ίδιων διαστάσεων $(A, B \in IF^{u \times v})$. Οι A, B έχουν

oform au unora arizropetifos nicos
 $P \in F^{n \times n}$ te $B = PAP^{-1}$

Problema

Av A, B oia zite $\det A = \det B$

Analiza

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P) \det(A) \det(P^{-1}) = \\ = \det(P) \det(A) (\det(P))^{-1} = \det A$$

Problema

i) Av $A, B \in F^{n \times n}$ oia zite isodunofos,
 (to arizropetifos der ison)

ii) Aa au $A, B \in F^{n \times n}$ oia, zite
 $\text{Bafida}(A) = \text{Bafida}(B)$

Analiza

i) Oerotas $Q = P^{-1}$ (rafe
 $B = PAP^{-1} \Rightarrow B = PAQ$ oia A, B isodunofos,

To arizropetifos der ison

n.x

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Oia } \text{Bafida}(A) = 2 = \\ = \text{Bafida}(B)$$

Aa au oia oia A, B isodunofos, oia
 oia A, B der nica oia oia $P \in F^{n \times n}$
 arizrop. te $B = PAP^{-1} \Rightarrow B = P \cdot I_n \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_n$

Arizropetifos

ii) ~~Aa~~ Aa oia oia i)

Δίδεται αν $f: V \rightarrow W$ γραμμική, e, e' δυο βάσεις V, g, g' δυο βάσεις του W τότε οι πίνακες $[f]_e^g$ και $[f]_{e'}^{g'}$ είναι ισοδυναμικοί.

Προσέγγιση

Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική, e, e' δυο βάσεις του V τότε οι πίνακες $[f]_e^e$ και $[f]_{e'}^{e'}$ είναι όμοιοι.

Απόδειξη

Οπώς είναι γραμμένο:

$$\begin{aligned}
 [f]_{e'}^{e'} &= [id_V \circ f \circ id_V]_{e'}^{e'} = \cancel{[id_V]_{e'}^{e'}} [f]_e^e \cancel{[id_V]_{e'}^{e'}} \\
 &= [id_V]_e^e [f]_e^e [id_V]_{e'}^{e'} \quad \text{Οπότε}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= [id_V]_{e'}^e \quad (\text{Γράφεται γινόμενο e και e' $[f^{-1}]_g^g$ ~~$[f]_e^e$~~) \\
 &= ([f]_e^g)^{-1} \quad \text{όπου f ισομορφισμός}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Άρα } P^{-1} &= ([id_V]_{e'}^e)^{-1} = [id_V]_e^{e'} = [id_V]_{e'}^{e'} \\
 \text{γιατί } id_V^{-1} &= id_V
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Άρα η } \otimes \text{ γίνεται } [f]_{e'}^{e'} &= P [f]_e^e P^{-1} \\
 \text{όρα } [f]_e^e, [f]_{e'}^{e'} &\text{ όμοιοι}
 \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική, e βάση του V

α) $A = [F]_e^e \in IF^{V \times V}$

Εστω $B \in IF^{V \times V}$ οποιος $\models$ τον A

Ερώτηση

Υπάρχει βάση e' του V $\models B = [F]_{e'}^{e'}$

Απάντηση

Ναι

Προσatz

Εστω $e = (e_1, \dots, e_k)$ βάση του V και

$F: V \rightarrow V$ ισομορφισμός. Για $i = 1, 2, \dots, k$

ορίζεται $g_i = F(e_i)$

(Από πρόβλημα 1) Άρα A ισομορφικός

$g = (g_1, \dots, g_k)$ βάση του V . Τοτε:

$$[F]_e^e = [id_V]_g^g$$

Απόδειξη

Εστω i $\models 1 \leq i \leq k$ Τοτε i είναι

του $[id_V]_g^g$ είναι οι συνεπαγωγές του

$id_V(g_i) = g_i$ αντιστοιχώντας τις βάσεις e

και g i είναι του $[F]_e^e$ είναι οι

συνεπαγωγές του $F(e_i)$ αντιστοιχώντας τις

βάσεις e . Άρα $g_i = F(e_i)$ το αποτέλεσμα επέρχεται

Πρόταση : Έστω $e = (e_1, \dots, e_k)$ διατεταγμένη

βάση του του V και $p \in \mathbb{R}^{k \times k}$ $T \in I$

i) P αυτοσπρίσιμος

ii) $\exists$ υπάρχει διατεταγμένη βάση $g = (g_1, \dots, g_k)$ του V
ώστε $P = [i dv]_g^g$

iii) $\exists$ διατεταγμένη βάση $h = (h_1, \dots, h_k)$ του V ώστε
 $P = [i dv]_h^h$

Απόδειξη

ii) $\Rightarrow$ i) Αφού $i dv: V \rightarrow V$ ισομορφισμός $\rightarrow [i dv]_g^g$ αυτοσπρίσιμος

i) $\Rightarrow$ ii) Υποθέτουμε P αυτοσπρίσιμος θα πούμετε $f: V \rightarrow V$ γραμ-

μική $f \in P = [f]_e^e$ Προσέλας Έστω $P = (P_{ij})$ Ορίζουμε :

$f \mu \in f(e_i) = \sum_{j=1}^k P_{ij} e_j$ Τότε έχουμε $P = [f]_e^e$

Αφού P αυτοσπρίσιμος $\Rightarrow f$ ισομορφισμός άρα

$g = f(e)$ για $i=1, \dots, k$ τότε f διατ. βάζει του v και
 $[id_v]_f^e = [f]_e^e = P$
 $\Rightarrow \Theta_a$ δ.ο. $i (=) iii)$

Απόδ.

$iii) \Rightarrow i$ Αφού $i d_v : V \rightarrow V$ isom $\rightarrow$
 $\rightarrow [i d_v]_e^e$ αντιστρέφεται

$i) \Rightarrow iii)$ Έστω P αντιστρέφεται

βάζει $Q = P^{-1}$ τότε Q αντιστρέφεται

από από το $ii)$ είναι υπάρχει

βάζει h με $Q = [id_v]_h^e$. Απο

$$P = Q^{-1} = ([id_v]_h^e)^{-1} = ([id_v]_e^h)^{-1} \\ = [id_v]_e^h$$

Πρόταση

Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ όμοιοι. Τότε
 υπάρχει $F: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ γραμμικός και
 βάσης e του $\mathbb{F}^n$ και e' του $\mathbb{F}^n$
 ώστε $A = [f]_e^e$, $B = [f]_{e'}^{e'}$

Απόδ.

Έστω $e = (e_1, \dots, e_n)$ η κανονική βάση
 του $\mathbb{F}$. Τότε έχουμε ότι υπάρχει

$F: V \rightarrow V$ γραμμική με $A = [F]_e^e$

Αφού A, B όμοιοι, υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$
 αντιστρέφεται με $B = P A P^{-1}$

Από P ανατρέφω, από την προ-
 γαμένη βάση υπάρχει βάση e' του F
 ώστε $P = [id_V]_e^{e'}$ Από $P^{-1} = ([id_V]_e^{e'})^{-1}$

$$= \left([id_V]_e^{e'} \right)^{-1} = [id_V]_e^{e'} \text{ και από}$$

$$B = P A P^{-1} = [id_V]_e^{e'} \cdot [F]_e^{e'} [id_V]_e^{e'}$$

$$= [id_V \circ F \circ id_V]_e^{e'} = [F]_e^{e'}$$

Ορισμός

Έστω $F: V \rightarrow V$ γραμμική $\mu \in V \neq \{0\}$

και V πεπεσμένη διάσταση Έστω

e βάση του V

$$\text{ορίζουμε } \det F = \det [F]_e^e \in F$$

Ο ορισμός Δεσ υιοθετείται από την
 επιλογή της βάσης e του V προφανώς

έστω g για άλλη βάση του V .

Εκπαιτ ότι οι πίνακες $[F]_e^e$

και $[F]_g^g$ είναι ~~ομοιογράφοι~~ ομοιογράφοι, και

οι ομοιογράφοι πίνακες έχουν την ίδια

ορίζουσα, δηλ $\det [F]_e^e = \det [F]_g^g$

π.χ

Εστω $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η γραμμική
αντιστοιχία με $F(x, y) = (x + 2y, x + 3y)$

Εστω $e = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ η
κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

$$F(e_1) = F((1, 0)) = (1, 1) = 1e_1 + 1e_2 \\ F(e_2) = F((0, 1)) = (2, 3) = 2e_1 + 3e_2$$

$$\rightarrow [F]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Αρα } \det F = \det ([F]_e^e) = \\ = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Αν $g = (g_1 = (0, 1), g_2 = (1, 0))$ τότε

$$F(g_1) = F((0, 1)) = (2, 3) = 3g_1 + 2g_2$$

$$F(g_2) = F((1, 0)) = (1, 1) = g_1 + g_2$$

$$\rightarrow [F]_g^g = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

↑ με ορισμένη βάση ↓

Αν ο πίνακας

$$[F]_g^g = [id_V]_e^g [F]_e^e [id_V]_g^e$$

$$\text{car } ([idv]_e^g)^{-1} = [idv]_g^e \quad (2)$$

Gradienatun kurva (1), (2)

Apa $[idv]_e^g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(idv)(e_1) = e_1 = (1, 0) = 0g_1 + 1g_2$$

$$(idv)(e_2) = e_2 = (0, 1) = 1g_1 + 0g_2$$

$$[idv]_g^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(idv)(g_1) = g_1 = (0, 1) = 0e_1 + 1e_2$$

$$(idv)(g_2) = g_2 = (1, 0) = 1e_1 + 0e_2$$

Gradienatun (1)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [f]_g^g \quad \text{kurva}$$

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ apa (2) kurva

Eprizenta

Given or nilai λ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ~~α~~ } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Απέναντι $\text{Βαθίδα}(A) = \text{Βαθίδα}(B)$
 και $\det(A) = \det(B)$

Exoche

$\det A = -3$ αφού A είναι αντιστρέψιμη

$$\det B = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 3 =$$

$$= 1 \neq \det A$$

Από $0(A, B)$ που είναι $0 \neq 0, 0, 1$

είναι ισοδυναμικοί; Άρα $\det A \neq 0$

$\Rightarrow \text{Βαθίδα}(A) = 3$ από ανακρί-

ση